

где величина ds , равная $Rd\theta$, представляет собой длину элемента mn стержня. Здесь предполагается, что толщина стержня мала по сравнению с радиусом R , поэтому можно пользоваться приведенной выше формулой, которая первоначально была получена для изгиба прямого стержня.

Создаваемый силой P изгибающий момент M_p составляет $M_p = -PR \cos \theta$, причем считается, что положительный момент вызывает сжатие внешних волокон криволинейного стержня. Изгибающий момент M_1 , обусловленный действием го-

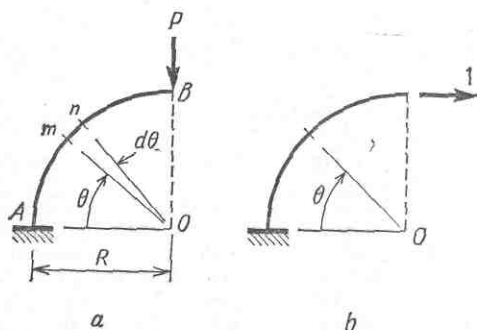


Рис. 11.9. Пример 8. Перемещение незакрепленного конца криволинейного стержня.

ризонтальной единичной нагрузки (рис. 11.9, б), составляет $M_1 = -R(1 - \sin \theta)$. Подставим эти значения моментов M_1 и M_p в выражение (11.11) и, проводя интегрирование, получим

$$\delta_r = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (-R)(1 - \sin \theta)(-PR \cos \theta) R d\theta = \frac{PR^3}{2EI}.$$

Таким образом, мы нашли горизонтальное смещение точки B методом единичной нагрузки.

11.4. ПРОГИБЫ БАЛОК, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ СДВИГОМ

Принцип возможной работы и метод единичной нагрузки вооружают нас великолепным аппаратом для решения задачи о нахождении прогибов в балке, вызываемых сдвигающими силами. В проведенном выше (разд. 6.11) обсуждении прогибов за счет сдвига использовалось дифференциальное уравнение линии прогибов, которое включало в себя член, содержащий коэффициент сдвига $\alpha_{сд}$. Этот коэффициент сдвига равен отношению касательного напряжения на нейтральной оси балки к среднему значению касательного напряжения (например, для балки с прямоугольным сечением $\alpha_{сд} = 3/2$). Этот же самый коэффициент сдвига входит в общее уравнение (11.4) метода единичной нагрузки.

Значения обусловленных сдвигом прогибов, определяемые из дифференциального уравнения линии прогибов или из уравнения

(11.4), являются приближенными по меньшей мере по двум причинам: во-первых, потому что при определении прогибов рассматриваются деформации сдвига на нейтральной оси и не учитывается изменение этих деформаций по высоте балки; во-вторых, потому что определение прогибов основано на теории, построенной только для случая чистого изгиба. От второго недостатка можно избавиться за счет перехода к более точным методам теории упругости (некоторые результаты, полученные этими методами, были уже приведены в разд. 6.11), в то время как первый можно устранить, воспользовавшись принципом возможной работы (см. уравнение (11.1)), вычислив величину работы внутренних сил интегрированием по всему объему балки. При подобном подходе в рассмотрение вводится новый коэффициент более точный, чем коэффициент сдвига $\alpha_{сд}$, как будет подробно объяснено ниже.

Метод единичной нагрузки определения прогибов балок основан на принципе возможной работы, для использования которого требуется найти выражения для работы как внешних, так и внутренних сил. Поскольку единичная нагрузка является единственной нагрузкой, приложенной к конструкции, выражение для работы внешних сил, согласно формуле (а) предыдущего раздела, имеет вид $W_{внеш} = 1 \cdot \Delta$. Здесь Δ — искомый прогиб, создаваемый реальными нагрузками, а 1 — единичная нагрузка, соответствующая этому прогибу.

Возможная работа внутренних сил представляет собой работу, которую совершают создаваемые единичной нагрузкой напряжения на деформациях, обусловленных реальными нагрузками. Ранее были рассмотрены четыре возможных вида результирующих напряжений: осевая сила, изгибающий момент, поперечная сила и крутящий момент. Поскольку сейчас мы ограничиваемся исследованием прогибов балок, обусловленных сдвигом, не будем учитывать влияния осевых сил и моментов.

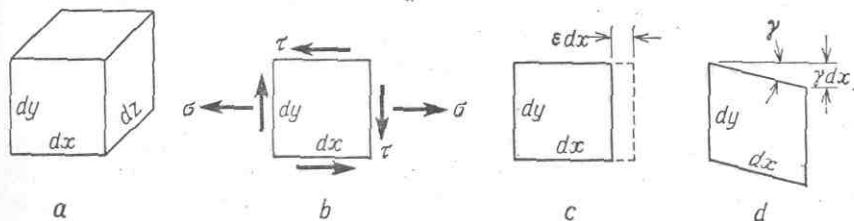


Рис. 11.10.

Выражение для возможной работы внутренних сил было получено выше путем умножения результирующих напряжений на значения соответствующих деформаций элемента балки; таким образом, в предыдущем разделе мы пришли к выражению (б). Сейчас, однако, для того, чтобы вывести выражение для возможной работы внутрен-

них сил, мы будем иметь дело непосредственно с напряжениями, возникающими в балке, и проводить интегрирование по всему ее объему.

Рассмотрим бесконечно малый элемент размерами dx , dy , dz (рис. 11.10, *a*), вырезанный из внутренней части балки, на которую действует единичная нагрузка. На гранях этого элемента будут действовать нормальные напряжения σ и касательные напряжения τ (рис. 11.10, *b*), соответствующие изгибающему моменту M_1 и поперечной силе Q_1 , создаваемым единичной нагрузкой. Эти напряжения можно подсчитать по формулам (5.10) и (5.18):

$$\sigma = \frac{M_1 y}{I}, \quad \tau = \frac{Q_1 S}{Ib}.$$

При использовании метода единичной нагрузки возможные деформации, придаваемые элементу, выбираются такими же, как и деформации, создаваемые реальными нагрузками. Этими деформациями являются растяжение (рис. 11.10, *c*) за счет изгибающего момента M_p и деформация сдвига (рис. 11.10, *d*) за счет поперечной силы Q_p . Деформации растяжения ε и сдвига γ выражаются следующими формулами:

$$\varepsilon = \frac{M_p y}{EI}, \quad \gamma = \frac{Q_p S}{G I b}.$$

Следовательно, возможная работа, совершаемая внутренними напряжениями σ и τ , возникающими на гранях малого элемента, равна

$$\begin{aligned} dW_{\text{внт}} &= (\sigma dy dz) (\varepsilon dx) + (\tau dy dz) (\gamma dx) = \\ &= \frac{M_1 M_p y^2}{EI^2} dx dy dz + \frac{Q_1 Q_p S^2}{G I^2 b^2} dx dy dz. \end{aligned}$$

Полная работа внутренних сил получается интегрированием последнего выражения по всему объему балки, что дает

$$W_{\text{внт}} = \int \frac{M_1 M_p y^2}{EI^2} dx dy dz + \int \frac{Q_1 Q_p S^2}{G I^2 b^2} dx dy dz.$$

Это выражение можно упростить, заметив, что для заданного поперечного сечения балки величины M_1 , M_p , Q_1 , Q_p , E , G и I являются постоянными. Следовательно, в каждом из приведенных выше интегралов можно перейти к интегрированию по площади поперечного сечения и по длине оси балки:

$$W_{\text{внт}} = \int_L \frac{M_1 M_p}{EI^2} \left[\int_F y^2 dy dz \right] dx + \int_L \frac{Q_1 Q_p}{G I^2} \left[\int_F \frac{S^2}{b^2} dy dz \right] dx; \quad (a)$$

здесь символы L и F означают, что интегрирование проводится соответственно по всей длине балки и по всей площади ее поперечного сечения. В первом слагаемом заключенное в квадратные скобки вы-

ражение представляет собой момент инерции, т. е. характеристику поперечного сечения. Во втором слагаемом выражение, стоящее в квадратных скобках, также зависит только от размеров поперечного сечения балки; поэтому удобно ввести в рассмотрение новую характеристику поперечного сечения $f_{сд}$, так называемый коэффициент формы при сдвиге. Эта характеристика определяется следующим образом:

$$f_{сд} = \frac{F}{I^2} \int_F \frac{S^2}{b^2} dF, \quad (11.12)$$

где $dF = dydz$ представляет собой площадь элемента поперечного сечения балки. Коэффициент формы является безразмерной величиной и может быть вычислен для каждой конкретной формы поперечного сечения, как будет показано ниже. Заменяя в выражении (а) величины, стоящие в квадратных скобках, на I и $f_{сд} I^2 / F$ соответственно, получим окончательное выражение для работы внутренних сил:

$$W_{внт} = \int \frac{M_1 M_p dx}{EI} + \int \frac{f_{сд} Q_1 Q_p dx}{GF}.$$

Наконец, приравняв работы внешних и внутренних сил, можно получить уравнение метода единичной нагрузки для прогиба Δ :

$$\Delta = \int \frac{M_1 M_p dx}{EI} + \int \frac{f_{сд} Q_1 Q_p dx}{GF}. \quad (11.13)$$

Здесь единичная нагрузка исключена путем деления правой и левой частей выражения на 1 [как это было сделано при выводе формулы (11.3)]. Уравнение (11.13) можно использовать для определения прогибов балок с учетом влияния как изгибающего момента, так и поперечных сил. Первое слагаемое в правой части этого уравнения соответствует тому члену полученного ранее выражения (11.4), который определяется влиянием изгиба. Однако второй член несколько отличается от аналогичного члена в полученном ранее выражении, а именно вместо коэффициента сдвига $\alpha_{сд}$ в него входит коэффициент формы $f_{сд}$. Таким образом, жесткость балки при сдвиге теперь определяется величиной $GF/f_{сд}$, а не величиной $GF/\alpha_{сд}$.

Коэффициент формы при сдвиге для каждой конкретной формы поперечного сечения подсчитывается по формуле (11.12). Например, если поперечное сечение является прямоугольником с шириной b и высотой h (рис. 5.12), то статический момент S (см. формулы (d) разд. 5.3) составляет





$$S = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right).$$

Для балки прямоугольного поперечного сечения величина F/I^2 равна $144/(bh^5)$. Таким образом, коэффициент формы будет равен

$$f_{сд} = \frac{144}{bh^5} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{4} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)^2 b dy_1 = \frac{6}{5}.$$

Аналогичным способом можно подсчитать коэффициенты формы для поперечных сечений иного вида. Например, коэффициент формы для сплошного кругового сечения составляет $10/9$, а для тонкостенного кольца равен 2. В случае двутавра и коробчатого поперечного сечения можно предположить, что касательные напряжения равномерно распределены по вертикальной стенке и приближенно равны поперечной силе, деленной на площадь стенки (см. разд. 5.3 и рис. 5.14); подобное предположение означает, что коэффициент формы для соответствующих балок равен $F/F_{ст}$ и его значение обычно лежит в интервале от 2 до 5. Значения коэффициента сдвига $\alpha_{сд}$ и коэффициента формы $f_{сд}$ для некоторых поперечных сечений сопоставляются в табл. 11.4.

Таблица 11.4. Коэффициент сдвига $\alpha_{сд}$ и коэффициент формы $f_{сд}$

	Форма поперечного сечения	$\alpha_{сд}$	$f_{сд}$
	Прямоугольник	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{5}$
	Круг	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{9}$
	Тонкостенное кольцо	2	2
	Коробчатое сечение или двутавр	$\frac{F}{F_{ст}}$	$\frac{F}{F_{ст}}$

В качестве примера определения прогибов балки, обусловленных сдвигом, используем метод единичной нагрузки (см. уравнение (11.13)) для того, чтобы найти величину прогиба в середине равномерно нагруженной свободно опертой балки. Пусть x — расстояние от левой опоры балки до рассматриваемого сечения; тогда выражения для создаваемых реальными нагрузками изгибающего момента и поперечной силы имеют вид

$$M_p = \frac{1}{2} qLx - \frac{1}{2} qx^2, \quad Q_p = \frac{1}{2} qL - qx,$$

где L — длина балки, а q — интенсивность равномерно распределенной нагрузки. Единичная нагрузка, приложенная в середине балки, также создает изгибающие моменты и поперечные силы, соответственно равные

$$M_1 = 1/2 \cdot l(x), \quad Q_1 = 1/2, \quad 0 \leq x \leq L/2.$$

Подстановка этих значений в (11.13) дает следующее выражение для прогиба δ в середине балки:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2}{EI} \int_0^{L/2} \frac{x}{2} \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) dx + \frac{2f_{сд}}{GF} \int_0^{L/2} \frac{1}{2} \left(\frac{qL}{2} - qx \right) dx = \\ &= \frac{5qL^4}{384EI} \left(1 + \frac{48f_{сд}EI}{5GFL^2} \right). \end{aligned} \quad (11.14)$$

Это выражение совпадает с результатом, полученным ранее решением дифференциального уравнения (см. выражение (6.46)), за исключением того, что вместо коэффициента сдвига $\alpha_{сд}$ теперь появился коэффициент формы $f_{сд}$.

Если использовать метод единичной нагрузки для случая действия сосредоточенной силы P , приложенной в середине пролета свободно опертой балки, то прогиб в середине получится равным

$$\delta = \frac{PL^3}{48EI} \left(1 + \frac{12f_{сд}EI}{GFL^2} \right), \quad (11.15)$$

что совпадает с выражением (6.50) при замене в последнем $\alpha_{сд}$ на $f_{сд}$. Для консольной балки, к незакрепленному концу которой приложена сосредоточенная сила P , метод единичной нагрузки дает следующее значение прогиба на свободном конце:

$$\delta = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{f_{сд}PL}{GF}. \quad (11.16)$$

Отметим, что при получении этого результата методом единичной нагрузки не делалось никаких допущений о деталях закрепления заделанного конца. Однако второе слагаемое в правой части выражения (11.16) соответствует рассмотренному в разд. 6.11 примеру в том конкретном случае, когда на заделанном конце были приняты такие граничные условия, чтобы первоначально плоские поперечные сечения могли свободно искажаться, а первоначально вертикальные грани элемента, расположенного на нейтральной оси, оставались вертикальными (см. выражение (j) разд. 6.11). Для других условий в заделке предыдущий метод дает иные результаты. Таким образом, при использовании метода единичной нагрузки делаются определенные допущения относительно вида граничных условий на заделанном конце¹⁾.

Энергия деформации сдвига. Энергия деформации сдвига в элементе балки, на котором возникают касательные напряжения τ (см. рис. 11.10, *b* и 11.10, *d*), равна $u dx dy dz$, где u — энергия деформации сдвига в единице объема. Эта удельная энергия деформации составляет $u = \tau^2 / (2G)$ (см. выражение (1.23а)). Таким образом, элементарную энергию деформации сдвига $dU_{сд}$ можно выразить через

¹⁾ Таблицу вычисленных методом единичной нагрузки значений прогибов балки, обусловленных сдвигом, можно найти в [6.18].